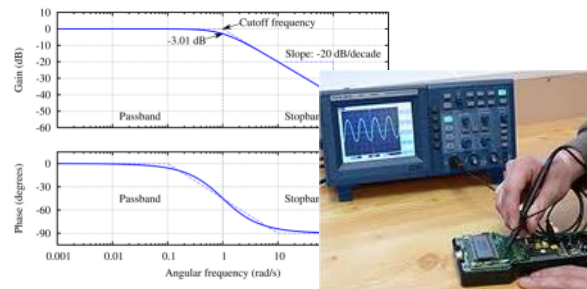




Electrónica Analógica

Capítulo 2: **Redes de Orden uno.** **Respuesta en el tiempo y la frecuencia**





Índice



1. Introducción.
 1. *Tipos de señales y sus herramientas de análisis.*
2. Redes de orden uno: red *paso-bajo*
 1. *Análisis en (t) . Constante de tiempo.*
 2. *Análisis en Laplace. Polo de la función $G(s)$*
 3. *Análisis en r.p.s. (ω) .*
3. Respuesta en frecuencia:
 1. *Bandas y frecuencias de corte.*
 2. *Relaciones entre las respuestas en frecuencia y en el tiempo*
4. Redes *paso-alto* de orden uno
5. Otras redes de orden uno: redes de *una sola constante de tiempo.*



1. Introducción



- ❑ Señales y amplificadores.
 - Los amplificadores han de procesar señales de muy diversa naturaleza
- ❑ Funciones básicas de un amplificador:
 - Adaptar niveles de la señal (tensión, corriente, potencia)...
 - Optimizar la interconexión a generadores y cargas...
 - **Ajustar las características en frecuencia** (o en el tiempo) **de la información de entrada**
- ❑ Imprescindible: *herramientas de análisis* apropiadas a cada caso



1. Introducción. Operando con señales

- ❑ Las señales reales son muy complejas de modelar
 - Fenómenos electromagnéticos (ecuaciones de Maxwell)
 - Ecuaciones diferenciales complejas de variables complejas
 - El problema general *se puede simplificar*, según el caso.
- ❑ Ejemplo: relación entre corriente y tensión en el condensador.

- Realidad física: el tiempo (t) → **ecuación diferencial**

- *Señales cualesquiera, que varían en el tiempo*

- *Exacto, pero difícil de analizar*

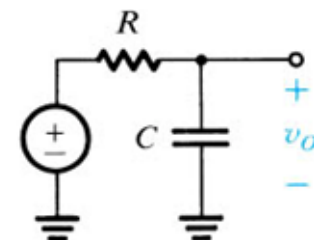
$$i_C(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$$

- Simplificación: frecuencia (ω) → **Fourier**

- Sólo para **Régimen Permanente Senoidal** ⇒ limitado

- *Facilita el análisis:*

- Utilizamos el concepto de **impedancia**
- Técnicas de Análisis de Circuitos en R.P.S.



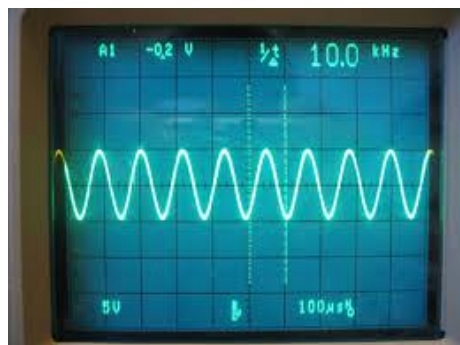
$$I_C = (C \cdot j\omega) \cdot V_C$$



1. Introducción. Formas de análisis.

❑ **R.P.S.** implica trabajar en el dominio de **Fourier**

- Generadores senoidales, impedancias, etc.
- Señales que suponemos invariables en el tiempo → **Fasores**



Fasor $\longleftrightarrow$ Expresión en t

$$V = A_{\angle \varphi_0} \leftrightarrow \begin{cases} v(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\ -\infty < t < +\infty \end{cases}$$



❑ **¿Y si las señales no son senoidales?**

→ Acudimos a técnicas de análisis alternativas, **según sea el caso**.

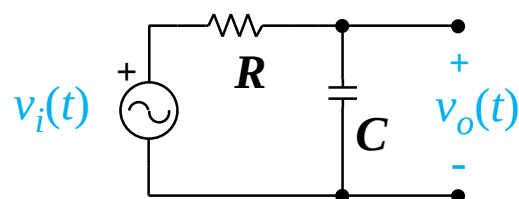
- Varias senoides en régimen permanente ($-\infty < t < +\infty$), incluida DC
 - Podemos aplicar **Superposición**.
- Señales en régimen transitorio ($t > t_0$) → análisis en **Laplace**



2. Redes de orden uno: análisis en (t)

- Modelables en t con una **ecuación diferencial de orden uno**

- Caso básico: **red RC simple**. Análisis en $t \rightarrow$ ecuación diferencial



$$\left. \begin{matrix} v_i(t) \\ v_o(t) \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

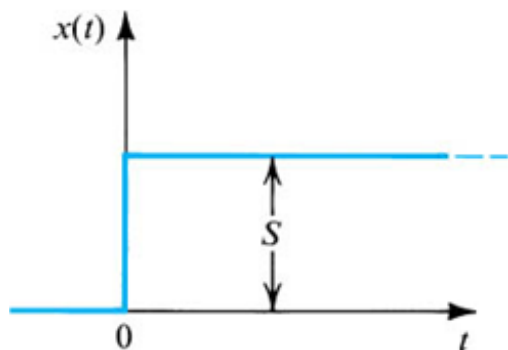
Planteamiento de la ecuación diferencial a partir de la relación:

$$i_C(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$$

- Hay un caso particular, muy sencillo de resolver...

- Carga-Descarga de condensador, ante un **escalón** en $v_i(t)$
- Como la red sólo tiene **una constante de tiempo**, la solución es:

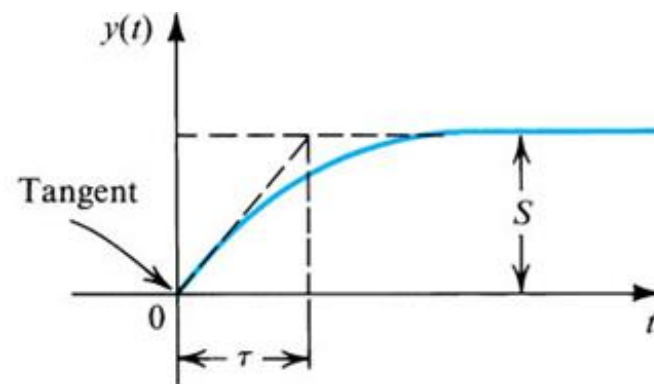
Entrada en (t) : escalón



$$v_i(t) = S \cdot u(t)$$

$$v_o(t) = S \cdot (1 - e^{-t/\tau_H})$$

$$RC = \tau_H \text{ (s)} \leftarrow \text{segundos}$$

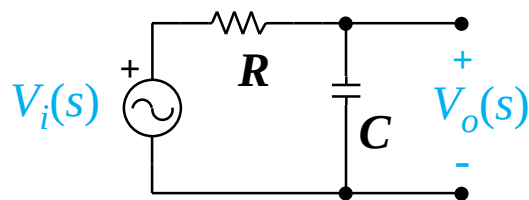




2. Redes de orden uno: análisis en (s)

□ Dominio de **Laplace**, variable compleja: $s = (\sigma + j\omega)$

■ Misma red, para señales en régimen transitorio y no periódicas



$$\left. \begin{matrix} v_i(t) \\ v_o(t) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} V_i(s) \\ V_o(s) \end{cases}$$

En Laplace las relaciones diferenciales se transforman y simplifican $\rightarrow Z(s)$

$$I_C(s) = C \cdot s \cdot V_C(s) = \frac{V_C(s)}{Z_C(s)}$$

■ Usando el concepto de impedancia en *Laplace* podemos obtener la **función de transferencia de la red**:

$$V_O(s) = \frac{Z_C(s)}{Z_C(s) + R} V_I(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + R} V_I(s) = \frac{1}{1 + sRC} V_I(s) \Rightarrow G(s) = \frac{V_O}{V_I}(s) = \frac{1}{1 + sRC}$$

■ La constante RC^{-1} , es un **polo** de la función de transferencia $G(s)$

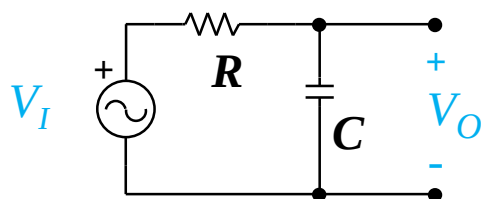
$$G(s_p) \Big|_{s_p = \frac{-1}{RC}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{-1}{RC}\right)RC} \rightarrow \infty \Rightarrow s_p = \frac{-1}{RC} = \frac{-1}{\tau_H}$$

¡Nótese que **polo** y **constante de tiempo** están relacionados!



2. Redes de orden uno: análisis en (ω)

- ❑ Analizar una red en *Laplace* es un problema complicado...
 - En posteriores materias, se estudiará esta cuestión con detalle
 - En caso de estar en r.p.s $\rightarrow$ análisis en $j\omega \rightarrow$ usando *Fasores*



$$\left. \begin{array}{l} v_i(t) \rightarrow V_I \\ v_o(t) \rightarrow V_O \end{array} \right\} \Rightarrow V_O = \frac{Z_C}{Z_C + R} \cdot V_I = \frac{1/j\omega C}{1/j\omega C + R} \cdot V_I$$

Hallamos la **función de transferencia** o **Ganancia** en función de (ω) :

$$G(\omega) = \frac{V_O}{V_I}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \cdot RC}$$



Es **la misma** función que en *Laplace*, si solo tomamos **la parte imaginaria** de (s) :

$$s = \sigma + j\omega \rightarrow \text{en r.p.s.} \rightarrow s = j\omega$$

Por eso decimos que la constante RC^{-1} es un **polo** de la ganancia $G(\omega)$

$$\left. \begin{array}{l} RC = \tau_H \text{ (s)} \leftarrow \text{segundos} \\ \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau_H} = \omega_H \text{ (rad/s)} \end{array} \right\}$$



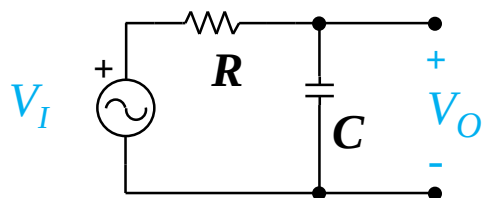
$$G(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_H}} = \frac{1}{1 + j\omega \cdot \tau_H}$$



2. Actividades



1.-En la red adjunta, $R=1\text{k}\Omega$ y $C=159\text{nF}$. Obtenga:



- Valor de la *constante de tiempo* de la red.
- Función de transferencia en Laplace, indicando el valor del polo (en rad/s).
- Expresión analítica de su respuesta en frecuencia.

2.-Sobre la misma red, supuesto que el generador de entrada es un escalón de 10V de amplitud, determine:

- Forma de onda de la tensión de salida, en función del tiempo.
- ¿En qué momento la salida alcanzará los 5V de amplitud?
- Si consideramos que la salida está en régimen permanente una vez se alcance el 99% del valor final, ¿Cuánto tiempo se tarda en alcanzar esta situación? Dé la respuesta en función de τ_H .

3.-Considere que en la entrada se introduce una señal $v_i(t)=5\cdot\text{sen}(\omega_0 t)$ V

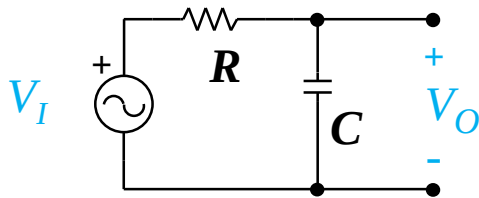
- Obtenga la salida $v_o(t)$ para estas tres frecuencias: $f_0=[100\text{Hz}, 1\text{kHz}, 10\text{kHz}]$
- Para cada caso anterior, represente en un mismo gráfico $v_i(t)$ y $v_o(t)$.



3. Respuesta en frecuencia: $G(\omega)$

□ Respuesta en frecuencia de una red $\rightarrow \mathbf{G(\omega)}$

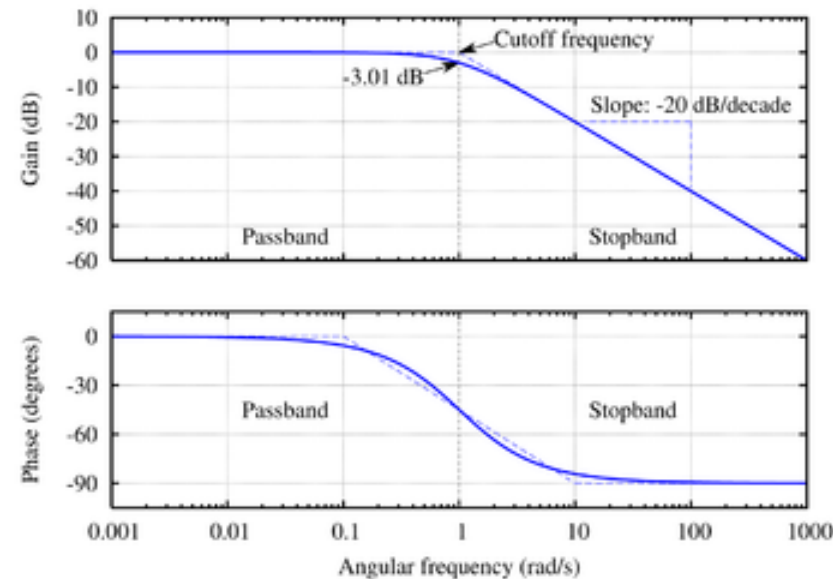
- Es la función de transferencia en función de la frecuencia (en ω ó f)
- Obtenemos fácilmente la salida para cualquier entrada senoidal



$$G(\omega) = \frac{V_o}{V_I}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \cdot RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_H}}$$

● ¿Cómo varía $G(\omega)$?

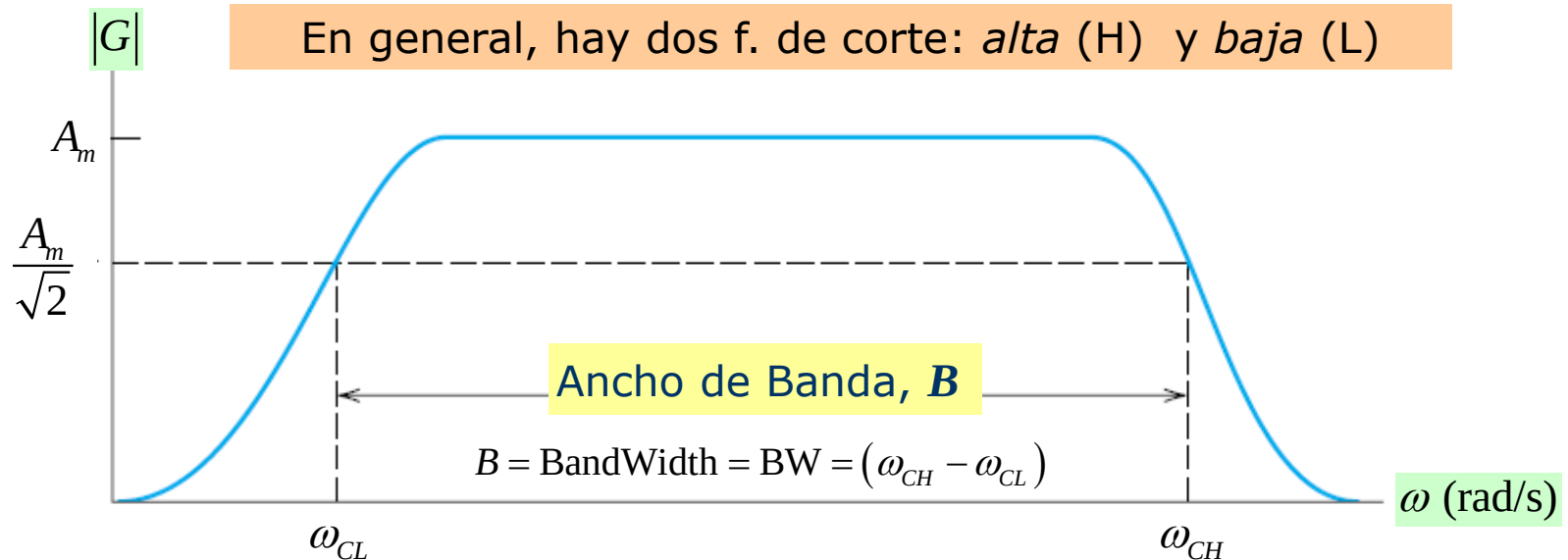
- Representando $G(\omega)$ podemos ver varias características de interés.
- Dos **bandas** de frecuencias
 - ✓ **De paso** = ganancia **constante**
 - ✓ **Eliminada** = ganancia tiende a cero
- Límite *B. de paso* $\leftrightarrow$ *B. eliminada*
 - ✓ **Frecuencia de corte**





3.1. Frecuencias de corte

- Son los límites entre bandas (paso/eliminada) de la R. en F.
 - Se elige como criterio el “**nivel para potencia mitad**”
 - En tensión o corriente, equivale a una reducción en factor $\sqrt{2}$



Definición de las
frecuencias de corte

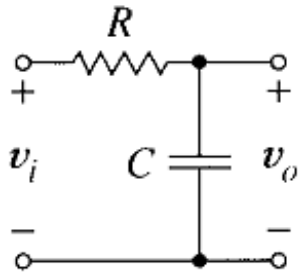
$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{CL} \Rightarrow |G(\omega_{CL})| = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \leftrightarrow G_{dB}(\omega_{CL}) \approx A_{m,dB} - 3dB \\ \omega_{CH} \Rightarrow |G(\omega_{CH})| = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \leftrightarrow G_{dB}(\omega_{CH}) \approx A_{m,dB} - 3dB \end{array} \right.$$



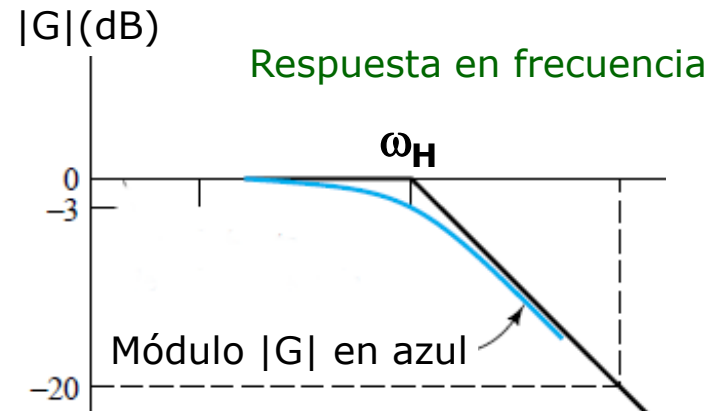
3.2. Relación f. de corte $\leftrightarrow$ respuesta en t.

- ❑ La respuesta en frecuencia y la temporal están relacionadas
 - Ancho de banda (ω) $\leftrightarrow$ Forma de onda (t).
 - Comenzamos por hallar el *ancho de banda* de la red RC:

Red RC "paso bajo":



$$G(\omega) = \frac{V_o}{V_i}(\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_H}}$$



Obtención de la *frecuencia de corte*:

$$|G(\omega)| = \left| \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_H)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_H)^2}}$$

$$\omega_{CH} \Rightarrow |G(\omega_{CH})| = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \Big|_{A_m=1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|G(\omega_H)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_H/\omega_H)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

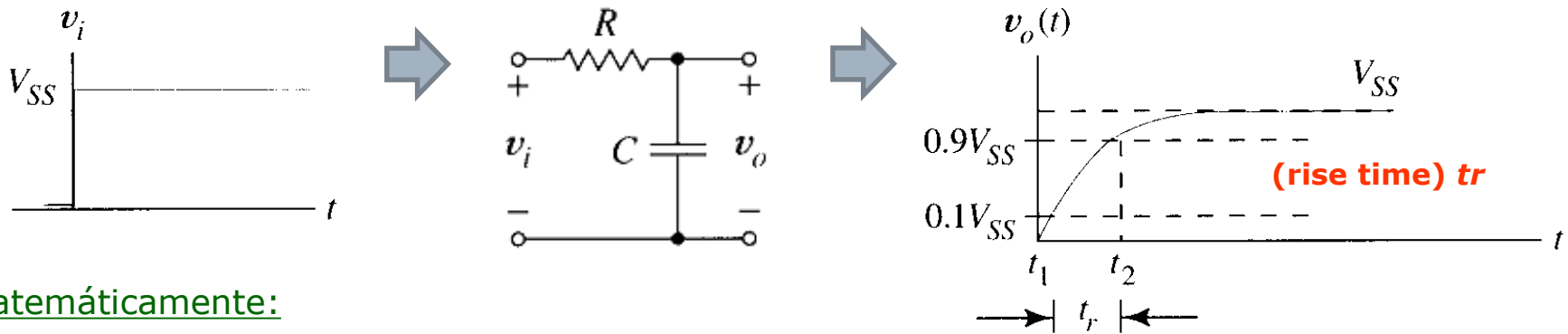
$$\omega_{CH} = \omega_H = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$$

¡La **frecuencia de corte** es la misma frecuencia que el **polo** y la inversa de la **cte. de tiempo**!



3.2. Relación f. de corte $\leftrightarrow$ respuesta en t.

- ❑ Respuesta a un *escalón* de una red *paso bajo* de orden uno
 - Una red “paso bajo” no deja pasar frecuencias altas: $\omega_{CH} = (1/RC)$
 - Una entrada *escalón* es una variación brusca $\leftrightarrow$ *altas frecuencias...*



Matemáticamente:

$$\left. \begin{aligned} v_i(t) &= V_{SS} \cdot u(t) \\ v_o(t) &= V_{SS} \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \end{aligned} \right\}$$

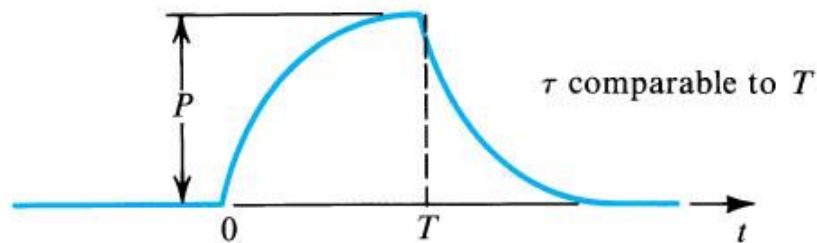
La respuesta temporal a una entrada en escalón es una señal que evoluciona **gradualmente** de forma exponencial $\rightarrow$ Definimos el **tiempo de subida** entre el 10% y el 90% de la variación en salida:

$$\left. \begin{aligned} v_o(t_1) &= 0,1 \cdot V_{SS} = V_{SS} \cdot (1 - e^{-t_1/\tau}) \\ v_o(t_2) &= 0,9 \cdot V_{SS} = V_{SS} \cdot (1 - e^{-t_2/\tau}) \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} e^{-t_1/\tau} &= 0,9 \\ e^{-t_2/\tau} &= 0,1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} e^{(t_2-t_1)/\tau} &= 9 \\ t_2 - t_1 &= \tau \cdot \ln 9 \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{t_r \approx 2,2\tau = \frac{2,2}{\omega_H}}$$

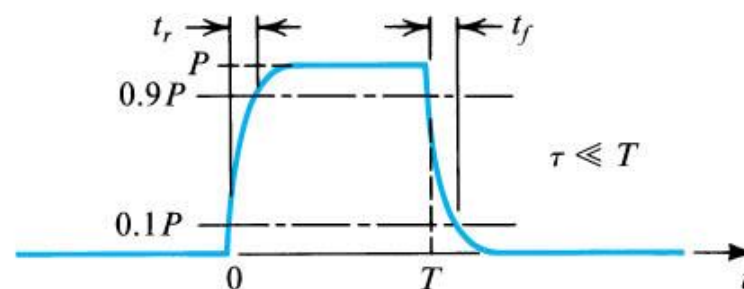


3.2. Relación f. de corte $\leftrightarrow$ respuesta en t.

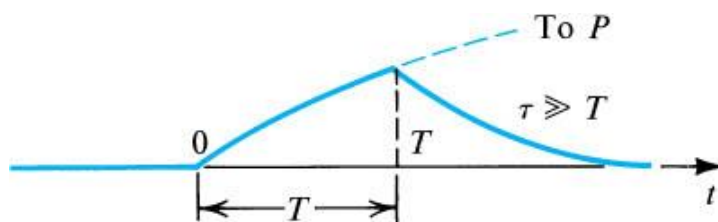
- Propiedades comunes a cualquier red $\rightarrow$ ¡Amplificadores!
 - Si se introduce un **pulso**, de T adecuado, en un amplificador y la salida es (o se parece a) una **exponencial**, se puede decir que:
 - La respuesta en frecuencia tiene un **polo** en ω_H cuyo valor puede saberse midiendo la τ de la exponencial.
- Ejemplos: diferentes formas de onda, en función de la relación $\tau \leftrightarrow T$



(a)



(b)



(c)

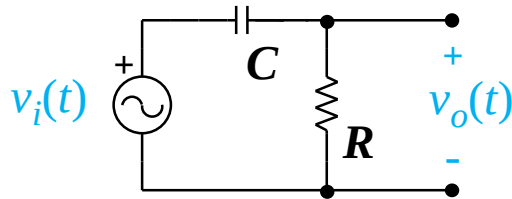
$$t_r \approx 2,2\tau = \frac{2,2}{\omega_H} = \frac{0,35}{f_H}$$

Cuestión: Justifique los valores (2,2) y (0,35) que aparecen en las expresiones de t_r

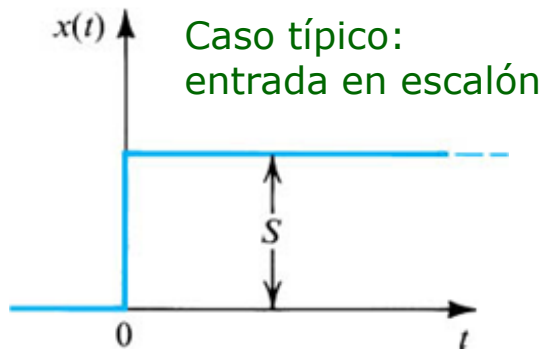


4. Redes *paso-alto* de orden uno

- ❑ Permutando R con C, la red *paso-bajo* se convierte en *paso-alto*
 - Análisis en $t \rightarrow$ ecuación diferencial de orden uno.

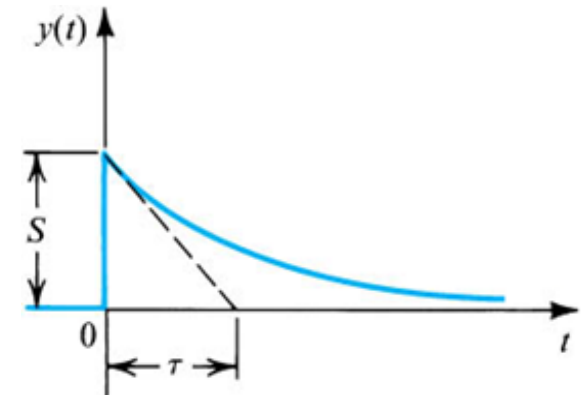


$$\left. \begin{matrix} v_i(t) \\ v_o(t) \end{matrix} \right\} \Rightarrow v_o(t) = R \cdot i_C(t) = RC \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} = \dots$$



$$RC = \tau_H \text{ (s)}$$

$$v_o(t) = S \cdot e^{-t/\tau_H}$$



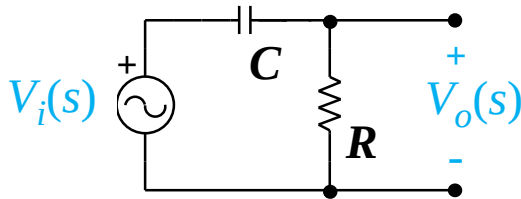
➔ **Muy importante:** obsérvese que ***solución general*** para tensiones y corrientes en ***redes de orden uno*** ante señales tipo ***escalón*** es:

$$x(t) = X_{final} + (X_{inicial} - X_{final}) \cdot e^{-t/\tau_H}$$



4. Redes *paso-alto* de orden uno

- La función de ganancia es muy cómoda de hallar en *Laplace* (s)
 - A partir de ella, se obtiene rápidamente la ganancia $\mathbf{G}(\omega)$



$$V_O(s) = \frac{R}{Z_C(s) + R} V_I(s) = \frac{R}{\frac{1}{sC} + R} V_I(s) = \frac{RsC}{1 + RsC} V_I(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{V_O}{V_I}(s) = \frac{sRC}{1 + sRC}$$

- La constante RC^{-1} , es el **polo** de la función de transferencia $G(s)$
- Además del polo, $G(s)$ tiene también un **cero en el origen**:

$$G(s_z) \Big|_{s_z=0} = \frac{s_z RC}{1 + s_z RC} = 0$$

→ La ganancia en la frecuencia, $G(\omega)$, se puede obtener analizando la red en **r.p.s.** o simplemente haciendo $s=j\omega$

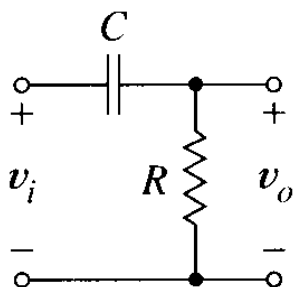
$$\Rightarrow G(\omega) = \frac{V_o}{V_i}(\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$



4. Redes *paso-alto* de orden uno

- ❑ Relación entre las respuestas en *tiempo* y *frecuencia*
 - Similar al caso *paso-bajo*: onda en (*t*), *polo* y *frecuencia de corte* son parámetros relacionados con la *constante de tiempo* de la red.

Red RC “paso alto”

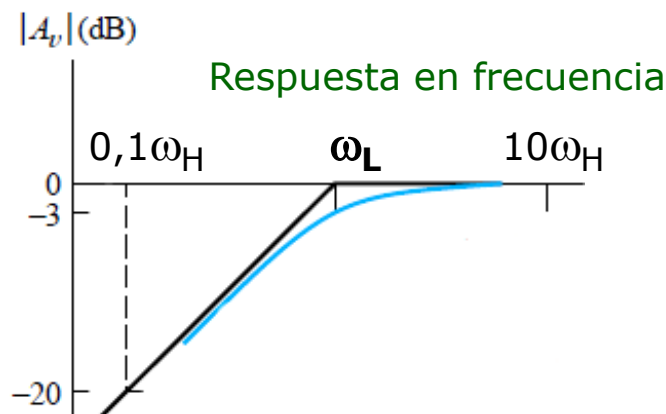
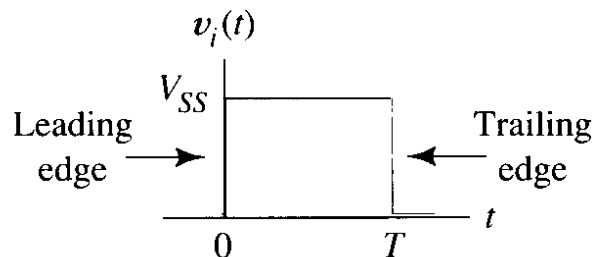


$$\frac{V_o}{V_i}(\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_L}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_L}}$$

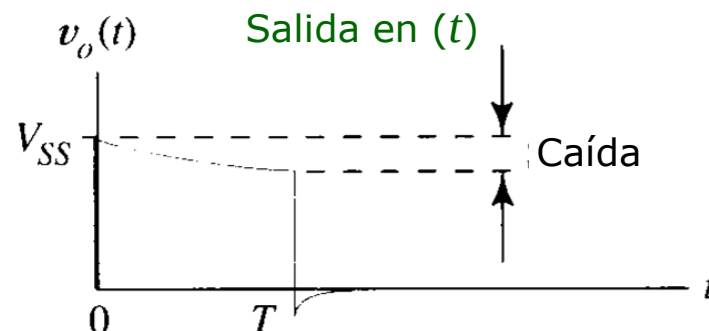
$$\omega_L = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$$

$$v_o(t) = V_{SS} e^{-\omega_L \cdot t}$$

Entrada en (*t*): escalón



Respuesta en frecuencia



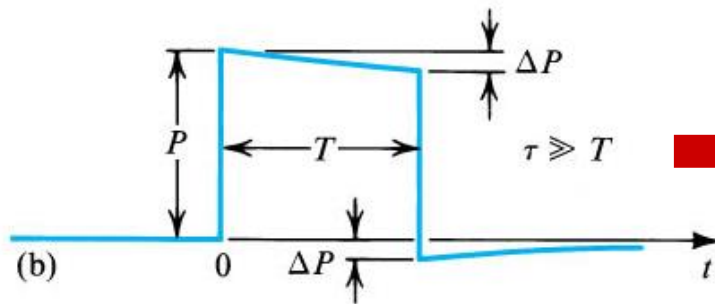
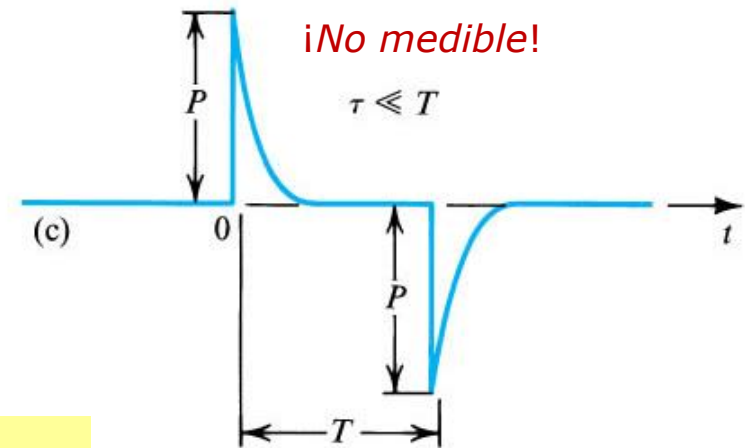
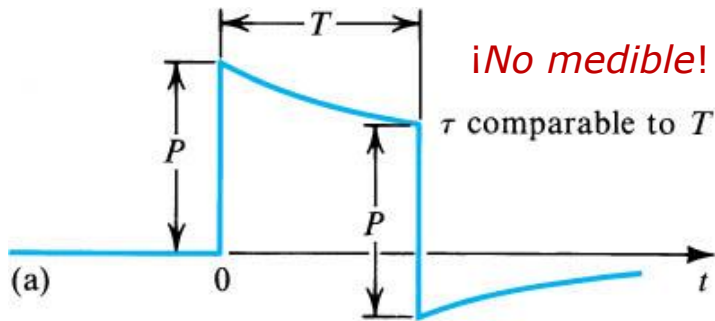
Salida en (*t*)



4. Redes *paso-alto* de orden uno

❑ Consecuencia práctica:

- Situación análoga al caso paso bajo, si bien es más difícil de estimar a simple vista si la señal es una exponencial simple.
 - La frecuencia de corte, ω_L , coincide con el **polo** de $G(s)$.
 - Dicho polo puede hallarse si se mide la **caída de nivel** en la parte plana del escalón, **si la caída es pequeña** (ver Malik, sección 1.6.8)



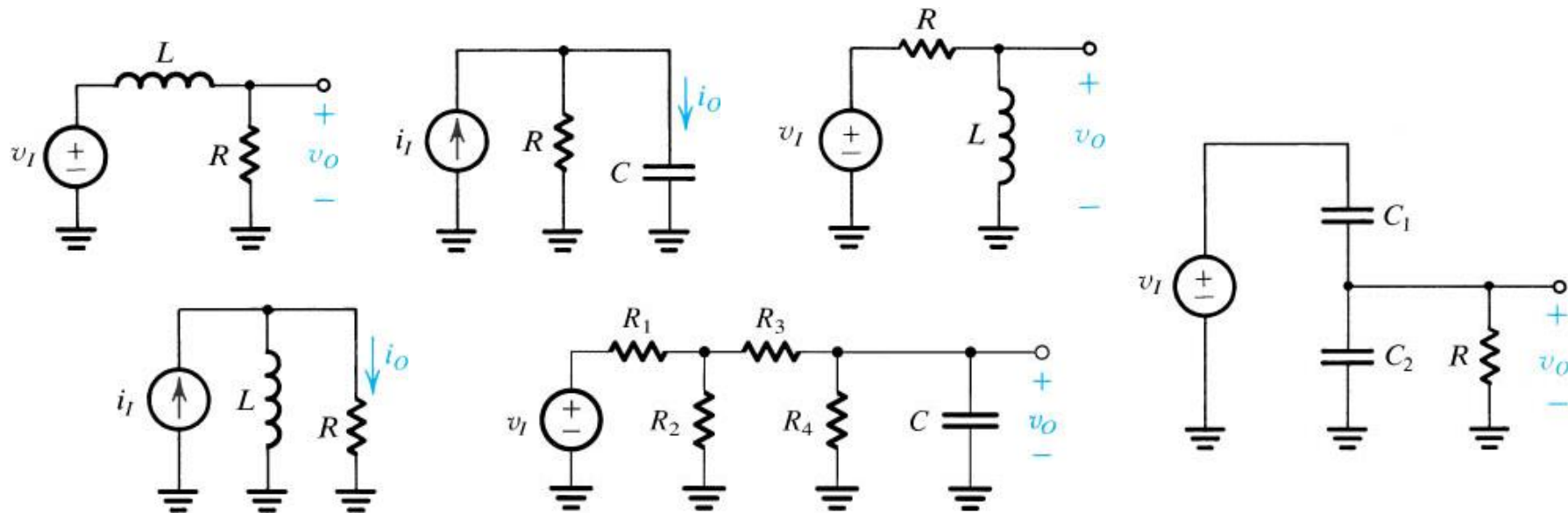
¡Medible!

$$\frac{\Delta P}{P} \bigg|_{\Delta P \ll P} \approx \omega_L T$$



5. Otras redes de orden uno

- ❑ El estudio realizado en este capítulo es genérico a todas las redes o sistemas (p.e. un amplificador) de *orden uno*
 - Las llamamos redes '**de una sola constante de tiempo**'
 - Observe que todas las redes siguientes son de **una sola τ** ...



Observación final: en posteriores temas y otras materias se verá que, en ciertas condiciones, **muchos** sistemas prácticos (amplificadores, etc.) pueden modelarse como **redes de una sola constante de tiempo**.



6. Conclusiones (1/2)



- ❑ Las diferentes **técnicas de análisis** de las **redes electrónicas** dependen del **tipo de señales** presentes:
 - En el **tiempo** → **Ecuaciones diferenciales**.
 - *Complejo de analizar, salvo en circuitos sencillos.*
 - Soluciones en **forma exponencial** ante señales **escalón** (caso muy habitual)
 - **Cualquier tipo de señales** → **Dominio de Laplace**
 - *La variable 's' también es compleja ($s = \sigma + j\omega$).*
 - *Soluciones muy usadas y útiles. Estudio gradual en esta y posteriores asignaturas.*
 - En **r.p.s.** (régimen permanente senoidal) → **Fourier**.
 - *Conversión a 'fasores' → trabajo en ' ω '.*
 - *Aplicamos superposición para poder trabajar con varios generadores y/o frecuencias.*



6. Conclusiones (2/2)



- ❑ **Modelado** del comportamiento de un circuito electrónico con señales prácticas:
 - Dichas señales se caracterizan por el “rango de frecuencias” que ocupan
 - *Un ejemplo: las señales de audio van desde los 20Hz hasta los 20kHz*
 - Utilizamos el concepto de “**Respuesta en Frecuencia**” (ReF)
 - *Expresiones y gráficas válidas en un “rango” dado de frecuencias*
 - *Definiciones y propiedades de la ReF: **banda de paso, frecuencias de corte, polos y ceros, etc.***
- ❑ Podemos necesitar conocer las **respuestas** (tensiones, corrientes) del circuito en circunstancias diversas:
 - En el tiempo (ejemplo: en ctos. digitales) o en la frecuencia.
 - Estas respuestas están íntimamente relacionadas con los polos y ceros del circuito
 - **Fáciles de modelar si la respuesta es de orden uno** (o similar)



Control de revisiones



- 2016-09-19: versión inicial